Universidad Nacional de Ingeniería **03-03-2006**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

EXAMEN SUSTITUTORIO DE CALCULO NUMERICO (MB535)
S O L U C I O N A R I O

- **SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **FUNDAMENTE CLARAMENTES SUS RESPUESTAS**

Problema 1

a Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in R$.

Determine los valores del parámetro α para los cuales la matriz A admite factorización de Cholesky.

Solución

Para que admita factorización de Cholesky la matriz A debe cumplir:

1. Sea Simétrica
2. Definida Positiva.

De la condición 2:

1>0

$(1-\alpha^2)>0$ ===> $-1<\alpha<1$ ....(1)

$(2*\alpha^3 - 3*\alpha^2+1)>0$ =====> $\alpha>-1/2$ .....(2)

de (1) y (2)

$\boxed{-1/2<\alpha<1}$

b. Los polinomios de Legendre se pueden obtener aplicando la siguiente formula recursiva:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

Escriba **una** función que genere el polinomio de Legendre para un grado ***n*** cualquiera usando la siguiente cabecera: **`function p=legendre(n)`**

Solución

```
% legendre.m
function p=legendre(n)
if n==0
   p=1;
elseif n==1
   p=[1 0];
else
p=((2*n-1)*[legendre(n-1) 0]-(n-1)*[0 0 legendre(n-2)])/n;
end
```

c. En la cuadratura de Gauss: $I = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$, los x_i son las raíces del polinomio de Legendre y los c_i son los factores de peso que se pueden obtener con la relación: $c_i = \dfrac{2}{[P_n'(x_i)]^2 (1 - x_i{}^2)}$. Haciendo uso de la función anterior crear otra función con la siguiente cabecera: **`function [x,c]=gauss_legendre(n)`**

Solución

```
% gauss_legendre.m
function [x,c]=gauss_legendre(n)
p=legendre(n);
x=roots(p);
c=2./(polyval(polyder(p),x)).^2./(1-x.^2);
```

d. Escriba una matriz de ecuaciones que represente la discretización del problema de valor frontera para

$$u_{xx} = -u_{yy}, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,2) = 1, \quad x \in [0,2],$$
$$u(0,y) = \sin \pi y + \frac{y}{2}, \quad u(2,y) = \frac{1}{2} - \cos\frac{\pi y}{2}, \quad y \in [0,2],$$

En el cuadrado [0,2]x[0,2] con tamaño de malla h=k=0.5

Solución

x= 0 0.5 1 1.5 2.0

y= 0 0.5 1 1.5 2.0

u(0,y)= 0 5/4 1/2 -1/4 1

u(2,y)= -0.5000 -0.2071 0.5000 1.2071 1.5000

-4p1	+ p2		+p4						= -1 - 5/4
p1	-4p2	+p3		+ p5					= -1
	p2	-4p3							= -1+0.207106
p1			-4p4	+p5		+p7			=-0.5
	p2		+p4	-4p5	+ p6		+ p8		=0
		p3		+p5	-4p6			+p9	=-0.5
			p4			-4p7	+p8		=0 +0.25
				p5		+p7	-4p8	+p9	=0
					p6		+p8	-4p9	=-1207106

Problema 2

Un préstamo de *A* dólares es devuelto en *n* pagos mensuales de M dólares cada uno, empezando un mes después que el préstamo se hace. Se puede mostrar que si el tipo de interés mensual es *r*, entonces

$$Ar = M\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Un préstamo de \$10000 se devolvió en 60 pagos mensuales de \$250, determine la tasa de interés mensual ***r***, use $r_0 = 0.015$.

a) Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.
b) Realizar 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en a).
c) Utilice el Método del Newton para aproximar el interés mensual *r* con cuatro cifras significativas.

Solución

a)

$$10000r = 250\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{60}}\right) \Rightarrow f(r) = 40r + \frac{1}{(1+r)^{60}} - 1 = 0$$

$$r = g(r) = \frac{1}{40}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{60}}\right) \Rightarrow g'(r) = \frac{3}{2}(1+r)^{-61} \Rightarrow |g'(0.015)| = 0.6049 < 1$$

Unicidad del punto fijo

a=0, *b*=0.015

g(a)$\in [a \quad b]$ *g(a)*= 0

g(b)$\in [a \quad b]$ *g(b)*= 0.0148

$\{x^k\} \in [a \quad b]$

$\therefore$ el punto fijo es único

b)

A partir del punto inicial $x_0 = 0.015$

$$r_k = \frac{1}{40}\left(1 - \frac{1}{(1+r_{k-1})^{60}}\right)$$

I	xi	g(xi)
1	0.015	0.0148
2	0.0148	0.0146
3	0.0146	0.0145

c)

$$f(r) = 40r + \frac{1}{(1+r)^{60}} - 1 \Rightarrow f'(r) = 40 - \frac{60}{(1+r)^{61}}$$

$$r_n = r_{n-1} - \frac{40r_{n-1} + \frac{1}{(1+r_{n-1})^{60}} - 1}{40 - \frac{60}{(1+r_{n-1})^{61}}}$$

$r_1 = 0.014411839$

$r_2 = 0.014394797$

$r_3 = 0.01439477$

Problema 3

Dada la siguiente integral con límites infinitos:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

a) Resolver usando cuadratura Gaussiana (n=4), para ello debe realizar un primer cambio de variable para llevarlo a limites finitos. (sug. $x = 2/t$)
b) Hallar el error de la aproximación obtenida en a) para ello debe hallar el valor exacto de la integral (sug. $u = \sqrt{x}$).
c) Comente sus resultados

Solución

a) Haciendo $x = 2/t$:

$$I = \int_0^2 \frac{2e^{-\sqrt{2/t}}}{t^2\sqrt{2/t}} dt$$

Para aplicar la cuadratura Gaussiana hacemos un segundo cambio de variable: $w = t - 1$:

$$I = \int_{-1}^{1} G(w)dw = \int_{-1}^{1} \frac{2e^{-\sqrt{2/(w+1)}}}{(w+1)^2\sqrt{2/(w+1)}} dw$$

De la tabla de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^{1} G(w)dw \approx c_1G(w_1) + c_2G(w_2) + c_3G(w_3) + c_4G(w_4) = 0.7593$$

b) Haciendo: $u = \sqrt{x}$

$$x = u^2 \quad dx = 2u\, du$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2u\, du = -2e^{-u}\Big|_1^{\infty} = \frac{2}{e} = 0.7358$$

$$error = |0.7358 - 0.7593| = 0.0283$$

c) La precisión no tan es buena.

Problema 4

Sea la ecuación diferencial de tercer orden:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = f(t)$$

$$y''(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y(0) = 2$$

t	0	0.05	0.1	0.15
f(*t*)	2.5	2.5025	2.51	2.5225

a) Plantee el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
b) Obtener y(0.2) aplicando Runge Kutta de orden 2 con h=0.1.
c) Determine el error si la solución analítica es:

$$y = \left(-\frac{19}{2}t + \frac{9}{4}t^2 + \frac{33}{2}\right)e^t - \frac{29}{2} - 6t - t^2$$

Solución

$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad x_3 = \ddot{y}$

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2 = x_3 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 3x_2 + x_1 + f(t) & x_3(0) = 0 \end{cases}$

b) Algoritmo de Runge Kutta 2

$$f(t) = t^2 + 2.5$$

$$k_1 = h\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 3x_3 - 3x_2 + x_1 + t^2 + 2.5 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = h\begin{bmatrix} x_2 + k_1(2) \\ x_3 + k_1(3) \\ 3(x_3 + k_1(3)) - 3(x_2 + k_1(2)) + (x_1 + k_1(1)) + (t+h)^2 + 2.5 \end{bmatrix}$$

$$X = X + \frac{1}{2}(k1 + k2) \qquad \text{con } X \in \Re^3,\ h{=}0.1$$

i=0 $\quad t_0=0 \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f(t) = t^2 + 2.5$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.015 \\ 0.206 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.0075 \\ 0.178 \end{bmatrix}$$

i=1 t_1=0.1 $X^{(1)}$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0.10075 \\ 0.0178 \\ 0.21215 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0.10253 \\ 0.039015 \\ 0.28353 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \begin{bmatrix} 2.20164 \\ 1.0359075 \\ 0.42584 \end{bmatrix}$$

yexact = 2.00000000000000 2.10027412173302 2.20240651737290
yaprox= 2.00000000000000 2.10000000000000 2.20164

c) Error = 0 0.2741×10^{-3} 0.7665×10^{-3}

Los Profesores